

**О СРАВНЕНИИ ПОИСКОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ**

Г. Г. ГОРВИЦ, О. И. ЛАРИЧЕВ

(Москва)

Рассматривается задача изучения свойств и сравнения двух методов нелинейного программирования — метода Дэвидона и метода сопряженного градиента — для класса существенно нелинейных вращных функций.

Введение

Рассмотрим объект управления, функциональная связь между входом u и выходом w которого имеет вид

$$w = \psi(u, \theta), \quad (1)$$

где ψ — оператор, заданный с точностью до вектора неизвестных параметров θ .

Предположим, что после наблюдения объекта имеется множество из N пар (\hat{u}, \hat{w}) , характеризующих объект.

Как известно, в существующей практике идентификации неизвестный вектор параметров θ оценивается обычно путем минимизации некоторого заданного функционала от невязок

$$\Phi = \Phi[\psi(\hat{u}, \theta) - \hat{w}]. \quad (2)$$

Таким образом, если заданы оператор ψ (1) и функционал (2), то задача сводится к задаче поиска экстремума нелинейной функции — к задаче нелинейного программирования.

Отметим, что потребность в эффективных методах нелинейного программирования возникает также при решении на ЦВМ задач оптимального управления, экономических задач и т. д.

В настоящее время известно много (50—70) различных методов нелинейного программирования (см., например, обзор [1]), однако оценить свойства того или иного метода или сравнить их между собой, как правило, очень трудно. Дело в том, что сходимость многих методов доказана лишь для класса квадратичных функций. Ни для одного из методов нет доказательства сходимости для класса строго унимодальных либо унимодальных [2] функций. За редкими исключениями не получены сопоставительные оценки скорости сходимости методов.

Эти трудности обусловили появление работ [3, 4] по сравнению отдельных методов нелинейного программирования на сложных тестах. Однако следует отметить, что метод, лучший (по какому-либо критерию) на одной из тестовых функций, может быть худшим на другой. Для одной и той же тестовой функции результат сравнения существенно зависит от выбора начальной точки поиска.

Цель данной работы состоит в изучении свойств и сравнении двух методов нелинейного программирования — метода сопряженного градиента

[5] и метода Дэвидона [6] для достаточно широкого класса нелинейных дифференцируемых функций. Указанные два метода вместе с методом Пауэлла [7] являются наиболее известными и широко применяемыми методами, в связи с чем задача их сравнения представляется весьма актуальной.

1. Рассматриваемые методы

Оба рассматриваемых метода состоят из повторяющейся последовательности выполнения следующих двух этапов: выбора направления поиска, ведущего к уменьшению функции *, и минимизации функции вдоль выбранного направления.

Предположим, что в обоих методах минимизация вдоль выбранного направления проводится одинаково и что при этом точно определяется наименьший положительный t -корень уравнения

$$f'_i(x_i + tp_i) = 0, \quad (3)$$

где f — минимизируемая функция, x_i — начальная точка i -й итерации, p_i — i -е направление минимизации.

При таком предположении отличие между методами состоит в способе выбора направлений минимизации.

Рассматриваемые методы являются квадратически сходящимися [5, 6]. Как известно, квадратически сходящийся метод нелинейного программирования обеспечивает точное определение минимума n -мерной квадратичной функции за n направлений поиска. На квадратичной функции оба метода полностью совпадают: начавшись в одной точке, они выбирают одни и те же направления [8].

Однако в случае неквадратичных нелинейных функций рассматриваемые методы существенно отличаются как по числу направлений поиска, так и по числу вычислений функции (и градиента), необходимых для достижения заданной окрестности точки экстремума.

Очередное направление в методе сопряженного градиента определяется по правилу

$$p_{i+1} = -g_{i+1} + \alpha_i p_i. \quad (4)$$

Здесь g_i — вектор градиента в начале i -го направления, p_i — вектор i -го направления, $p_0 = -g_0$, α_i — положительный коэффициент, определяемый по формуле

$$\alpha_i = \frac{g_{i+1}^T g_{i+1}}{g_i^T g_i}, \quad (5)$$

где g_i^T — транспонированный вектор g_i .

Очередное направление в методе Дэвидона определяется по правилу

$$s_{i+1} = -H_{i+1} g_{i+1}. \quad (6)$$

Здесь H_{i+1} — положительно определенная матрица, вычисляемая по соотношению

$$H_{i+1} = H_i + A_i + B_i, \quad (7)$$

где

$$A_i = \frac{\sigma_i \sigma_i^T}{\sigma_i^T y_i}, \quad B_i = -\frac{H_i y_i y_i^T H_i}{y_i^T H_i y_i}, \quad y_i = g_{i+1} - g_i, \quad \sigma_i = \beta_i s_i, \quad (8)$$

$\beta_i > 0$ — коэффициент, получаемый при минимизации по выбранному направлению.

Чаще всего полагают $H_0 = E$, т. е. $s_0 = -g_0$.

* Для определенности далее предполагается, что рассматривается задача поиска минимума нелинейной функции.

Охарактеризуем рассматриваемые методы. В методе сопряженного градиента первый шаг делается по антиградиенту функции. Вторым шагом делается в предположении, что значения градиентов в начале первого и второго шага принадлежат квадратичной функции. Если это предположение справедливо, то второй шаг метода приводит в экстремум функции u для $n = 2$.

В методе Дэвидона выбор очередного направления производится при помощи матрицы H_i , учитывающей все предыдущие измерения градиента нелинейной функции. Правила изменения матрицы H_i выбраны так, что при квадратичной функции матрица H_n представляет собой обратную матрицу вторых производных n -мерной функции в точке экстремума.

2. Класс рассматриваемых функций

Положим, что рассматриваемые функции относятся к классу нелинейных, дифференцируемых, унимодальных функций. Особенностью данного типа функций является наличие оврагов [2]. Овраг лучше всего описать в географических терминах, интуитивно понятных при представлении рельефа функции в виде гористой местности с протекающей в ущелье рекой. Дно оврага можно представить как русло реки; образующая дна оврага — направление течения. Овраг можно охарактеризовать крутизной стенок, шириной дна, а также пологостью — степенью понижения дна оврага вдоль образующей. Дно оврага (как и русло реки) может быть прямым либо извилистым.

Общепризнано, что особые трудности при поиске связаны с наличием узких, пологих и извилистых оврагов, крутизна стенок которых намного больше, чем крутизна образующей дна оврага. Эти трудности отражены в широко распространенных тестах (функция Розенброка [4, 5], функция Флетчера и Пауэлла [4, 5], функция Пауэлла [9] и т. д.).

Процесс поиска экстремума подобной овражной функции можно разделить на следующие этапы.

1. Спуск в овраг. Этот этап характеризуется резким убыванием нормы градиента.

2. «Разворот» вдоль оврага, т. е. смена направления спуска на направление, ведущее вдоль дна оврага. Этот этап характеризуется значительными углами между последующими направлениями минимизации.

3. Продвижение вдоль дна узкого, пологого оврага. Этот этап характеризуется малыми углами между последующими направлениями минимизации. Для i -го направления поиска, ведущего вдоль дна узкого оврага, можно приближенно записать

$$g_i = -k_i' g_{i+1}, \quad (9)$$

где k_i' — положительный коэффициент; g_i, g_{i+1} — значения градиентов в начале и конце i -го направления поиска.

4. Поиск в окрестности экстремума. Как известно, на этом этапе рассматриваемая функция близка к квадратичной.

В разделах 3 и 4 проводится исследование свойств методов сопряженного градиента и Дэвидона при поиске экстремума нелинейных унимодальных функций. Доказательства, приведенные в этих разделах, даны для двумерных функций. Однако, как будет показано в разделе 6, основные качественные выводы справедливы и в общем случае.

3. Некоторые свойства метода Дэвидона

Утверждение 1. Каждое последующее направление в методе Дэвидона можно представить как линейную комбинацию двух векторов: вектора антиградиента в начальной точке направления и вектора предыдущего направления, причем коэффициент при последнем векторе может быть любого знака.

Доказательство. Используя уравнения (6) — (8), можно записать

$$H_{i+1}g_{i+1} = (H_i + A_i + B_i)g_{i+1} = H_i g_{i+1} + B_i g_{i+1}. \quad (10)$$

Очевидно, что

$$A_i g_{i+1} = 0, \quad (11)$$

так как

$$\sigma_i^T g_{i+1} = 0 \quad (12)$$

при точной минимизации по направлению.

Отсюда также вытекает, что

$$g_i^T H_i g_{i+1} = 0. \quad (13)$$

Из (10) следует

$$\begin{aligned} H_{i+1}g_{i+1} &= H_i g_{i+1} \frac{H_i (g_{i+1} - g_i) (g_{i+1}^T - g_i^T) H_i g_{i+1}}{(g_{i+1}^T - g_i^T) H_i (g_{i+1} - g_i)} = \\ &= H_i g_i \frac{g_{i+1}^T H_i g_{i+1}}{g_{i+1}^T H_i g_{i+1} + g_i^T H_i g_i} + H_i g_{i+1} \frac{g_i^T H_i g_i}{g_{i+1}^T H_i g_{i+1} + g_i^T H_i g_i} \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая, что вектор g_{i+1} перпендикулярен вектору $H_i g_i$, можно записать

$$H_i g_{i+1} = k_1 g_{i+1} + k_2 H_i g_i \operatorname{sign}(g_i^T H_i g_{i+1}), \quad (15)$$

где k_1, k_2 — положительные коэффициенты.

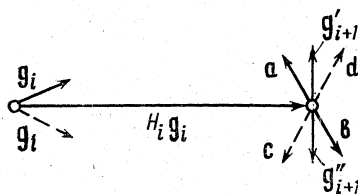


Рис. 1

Рассмотрим рис. 1. Из условия $g_i^T H_i g_{i+1} = 0$ следует, что при векторе g_i , изображенном сплошной линией, вектор $H_i g_{i+1}$ может быть изображен либо как вектор **a**, либо как вектор **b**. Из условия $g_{i+1}^T H_i g_{i+1} \geq 0$ следует, что при векторе $g_{i+1} = g_{i+1}'$ вектор $H_i g_{i+1}$ совпадает с вектором **a**, а при $g_{i+1} = g_{i+1}''$ вектор $H_i g_{i+1}$ совпадает с вектором **b**. Из данного рассмотрения

следует, что

$$\operatorname{sign}(g_i^T H_i g_{i+1}) = -\operatorname{sign}(g_i^T g_{i+1}). \quad (16)$$

Из аналогичного рассмотрения при пунктирных векторах g_i , d и c так же следует выражение (16).

Из подстановки (16) в (15) следует

$$H_i g_{i+1} = k_1 g_{i+1} - k_2 H_i g_i \operatorname{sign}(g_i^T g_{i+1}). \quad (17)$$

Введем следующие обозначения:

$$g_i^T H_i g_i = l, \quad g_{i+1}^T H_i g_{i+1} = m. \quad (18)$$

При умножении (17) на g_{i+1}^T получим

$$m = k_1 g_{i+1}^T g_{i+1}, \quad (19)$$

откуда следует

$$k_1 = \frac{g_{i+1}^T H_i g_{i+1}}{g_{i+1}^T g_{i+1}}. \quad (20)$$

При умножении (17) на g_i^T получим

$$\frac{g_{i+1}^T H_i g_{i+1} g_i^T g_{i+1}}{g_{i+1}^T g_{i+1}} = k_2 g_i^T H_i g_i \operatorname{sign}(g_i^T g_{i+1}). \quad (21)$$

Отсюда следует

$$k_2 = \frac{\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{i+1} \mathbf{g}_{i+1}^T H_i \mathbf{g}_{i+1}}{\mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1} \mathbf{g}_i^T H_i \mathbf{g}_i \text{sign}(\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{i+1})}. \quad (22)$$

Подставляя (17), (20), (22) в (14), получаем

$$\begin{aligned} H_{i+1} \mathbf{g}_{i+1} &= \left(\frac{m}{l+m} - \frac{m}{l+m} \frac{\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{i+1}}{\mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1}} \right) H_i \mathbf{g}_i + \frac{ml}{(m+l) \mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1}} \mathbf{g}_{i+1} = \\ &= \frac{m}{(m+l) \mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1}} [\mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{i+1}] H_i \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_{i+1} \mathbf{g}_i^T H_i \mathbf{g}_i = \\ &= k_3 [H_i \mathbf{g}_i (\mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{i+1}) + \mathbf{g}_{i+1} \mathbf{g}_i^T H_i \mathbf{g}_i] \end{aligned} \quad (23)$$

или

$$\mathbf{s}_{i+1} = k_3 [\mathbf{s}_i (\mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{i+1}) - \mathbf{g}_{i+1} \mathbf{g}_i^T H_i \mathbf{g}_i], \quad (24)$$

что и требовалось доказать.

Согласно формулам (6) — (8) матрица H_i включает в себя все предыдущие матрицы H_j ($j = 0, 1, \dots, i-1$), т. е. в ней учтены все предыдущие значения градиента.

Уравнение (24) позволяет сделать вывод, что все эти значения влияют на величину, но не на знак коэффициента при градиенте \mathbf{g}_{i+1} .

Коэффициент при втором векторе — s_i зависит лишь от двух значений градиента — в начале данного и предыдущего направления. Этот коэффициент может быть отрицателен, если

$$\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_{i+1} > 0. \quad (25)$$

Рассмотрим изменение коэффициентов при векторах \mathbf{s}_i и \mathbf{g}_{i+1} при минимизации овражной функции.

Коэффициент при \mathbf{s}_i может менять знак в зависимости от векторов \mathbf{g}_i и \mathbf{g}_{i+1} и угла между ними. При спуске в овраг или при резком изменении направления оврага может выполняться условие (25), что может привести согласно (24) к резкому повороту очередного направления минимизации. Этот факт подчеркивает «гибкость» метода, его способность быстро реагировать на изменение характера функции.

На третьем этапе поиска, в узком овраге, коэффициент при \mathbf{s}_i будет согласно (9) всегда положителен и близок к максимальному значению.

Коэффициент при векторе \mathbf{g}_{i+1} всегда положителен. Его величина зависит лишь от угла между векторами \mathbf{g}_i и $H_i \mathbf{g}_i$. Если i -е направление минимизации мало отличается от антиградиента (что возможно при спуске или при изменении направления оврага), то этот коэффициент максимален, что существенно влияет на следующее направление минимизации, «поворачивая» его вдоль дна оврага. При продвижении вдоль оврага этот коэффициент минимален, так как градиент почти перпендикулярен дну узкого пологого оврага.

4. Некоторые свойства метода сопряженного градиента

Аналогично (24) очередное направление в методе сопряженного градиента может быть представлено как сумма двух векторов:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \alpha_i \mathbf{p}_i - \mathbf{g}_{i+1} = \frac{\mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1}}{\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i} \mathbf{p}_i - \mathbf{g}_{i+1}. \quad (26)$$

Хотя векторы в (26) те же, что и в (24), выбор направления в методе сопряженного градиента производится иначе, чем в методе Дэвидона. Прежде всего $\alpha_i > 0$, т. е. возможен поворот \mathbf{p}_{i+1} под углом к \mathbf{p}_i , не превышающий 90° . Во-вторых, величина α_i зависит лишь от соотношения норм векторов \mathbf{g}_i и \mathbf{g}_{i+1} , но не от их направления.

Используя (4) и (5), можно записать

$$\frac{\mathbf{g}_{i+1}^T \mathbf{g}_{i+1}}{\mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i} \mathbf{p}_i = - \sum_{j=0}^i \frac{\mathbf{g}_{j+1}^T \mathbf{g}_{j+1}}{\mathbf{g}_j^T \mathbf{g}_j} \mathbf{g}_j. \quad (27)$$

Согласно (27) на выбор направления в методе сопряженного градиента влияют все предыдущие значения градиента, причем величина влияния зависит от коэффициентов α_j . В узком пологом овраге величины α_j примерно равны. Очевидно, что при этом с возрастанием j градиент \mathbf{g}_j все меньше влияет на направление \mathbf{p}_j .

Данный факт свидетельствует об «инерционности» метода, о его плохой приспособляемости к изменению характера функции.

Плохое качество метода отмечалось при его численной проверке на функции Розенброка [5]. Для улучшения предложено периодически «обновлять» метод — через r направлений начинать его снова с антиградиента и далее определять направления согласно (26). Периодическое «обновление» делает метод более гибким.

Через какое число направлений следует «обновлять» метод? Очевидно, что для сохранения свойства квадратической сходимости метода следует взять $r \geq n$. С другой стороны, желательно брать r ближе к n , чтобы увеличить «гибкость» метода. В [5] выбрано $r = n + 1$. Столь же обоснованным является выбор $r = n$.

5. Подход к сравнению методов

Обычный подход к аналитическому сравнению методов нелинейного программирования состоит в следующем. Для рассматриваемого класса функций доказывается сходимость методов. Далее определяется скорость сходимости — показатель, по которому выносится суждение о превосходстве какого-либо из методов.

Можно предложить иной подход к задаче сравнения рассматриваемых методов.

Пусть по двум методам нелинейного программирования определяются направления минимизации в точке A , причем по первому методу выбирается направление AD с минимумом в точке D , а по второму после поиска вдоль двух направлений минимизации (AB и BC) определяется точка C , расположенная на прямой AD . Если $f(D) < f(C)$, то можно считать, что первый метод обеспечивает более успешное продвижение к экстремуму функции, чем второй.

Действительно, первый метод обеспечивает после минимизации по одному направлению меньшее значение функции, чем второй метод после минимизации по двум направлениям.

Предложенный подход справедлив при предположении, что минимизируемая функция является унимодальной вдоль отрезков AB , BC и AD . Нетрудно убедиться, что это предположение справедливо на 2-м, 3-м и 4-м этапах поиска, где поиск осуществляется на небольшом участке оврага.

Таким образом, в качестве критерия сравнения методов в данной работе используется число направлений минимизации. Этот критерий использовался и ранее в ряде работ (см., например, обзор [4]). Напомним, что согласно сделанному выше предположению способы минимизации вдоль направления в обоих методах одинаковы.

6. Сравнение методов

Утверждение 2. Процессы поиска экстремума при движении из одной и той же начальной точки по методу Дэвидона и сопряженного градиента совпадают на первых двух направлениях для любой нелинейной функции.

Согласно (4)–(8) первые направления движения, определяемые по обоим методам, совпадают:

$$s_0 = p_0 = -g_0. \quad (28)$$

Следовательно, после минимизации по первому направлению в обоих методах для нахождения второго направления используется один и тот же вектор.

Согласно (6)–(8)

$$\begin{aligned} -s_1 = H_1 g_1 &= (H_0 + A_0 + B_0) g_1 = g_1 + B_0 g_1 = g_1 - \frac{g_1 g_1^T g_1 - g_0 g_1^T g_1}{g_1^T g_1 + g_0^T g_0} = \\ &= \frac{1}{g_1^T g_1 + g_0^T g_0} (g_1 g_0^T g_0 + g_0 g_1^T g_1). \end{aligned} \quad (29)$$

Согласно (4), (5)

$$-p_1 = g_0 \frac{g_1^T g_1}{g_0^T g_0} + g_1 = \frac{1}{g_0^T g_0} (g_1 g_0^T g_0 + g_0 g_1^T g_1). \quad (30)$$

Следовательно, $s_1 = k_5 p_1$, что и требовалось доказать ($k_5 > 0$ — постоянная).

Дальнейшие направления движения, определяемые по разным методам, оказываются различными. Можно определить условия, при которых является более успешным тот или иной выбор направлений.

Определим условия, при которых периодическое «обновление» при использовании метода сопряженного градиента позволяет выбирать более успешные направления, чем при методе Дэвидона.

Пусть j -е направление при использовании обоих методов начинается из одной точки и при методе сопряженного градиента совпадает с антиградиентом. Метод сопряженного градиента имеет преимущество тогда, когда j -е направление, определенное по этому методу, проходит через конечную точку $(j+1)$ -го направления, определяемого по методу Дэвидона:

$$\gamma_j g_j = \gamma' (\beta_j H_j g_j + \beta_{j+1} H_{j+1} g_{j+1}) = \gamma' (-\sigma_j - \sigma_{j+1}), \quad (31)$$

где $\gamma', \gamma_j > 0$ — постоянные.

Умножая (31) на σ_{j-1}^T , получим

$$\sigma_{j-1}^T \sigma_j + \sigma_{j-1}^T \sigma_{j+1} = 0. \quad (32)$$

Из (32) следует, что два из трех последовательных направлений минимизации s_{j-1}, s_j, s_{j+1} образуют тупой угол.

Отсюда можно сделать вывод, что выбор направления по антиградиенту может быть более удачным, если происходит значительное изменение направления поиска, при использовании метода Дэвидона.

Определим условия, при которых использование метода Дэвидона обеспечивает выбор более успешных направлений, чем при методе сопряженного градиента. Пусть j -е направление в обоих методах начинается из одной точки. Метод Дэвидона имеет преимущество тогда, когда j -е направление, определенное по этому методу, проходит через конечную точку $(j+1)$ -го направления, определенного по методу сопряженного градиента:

$$\begin{aligned} \gamma'' H_j g_j &= \beta_j g_j + \beta_{j+1} \left(\frac{g_{j+1}^T g_{j+1}}{g_j^T g_j} g_j + g_{j+1} \right) = \\ &= g_j \frac{\beta_j g_j^T g_j + \beta_{j+1} g_{j+1}^T g_{j+1}}{g_j^T g_j} + \beta_{j+1} g_{j+1}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\gamma'' > 0$ — постоянная.

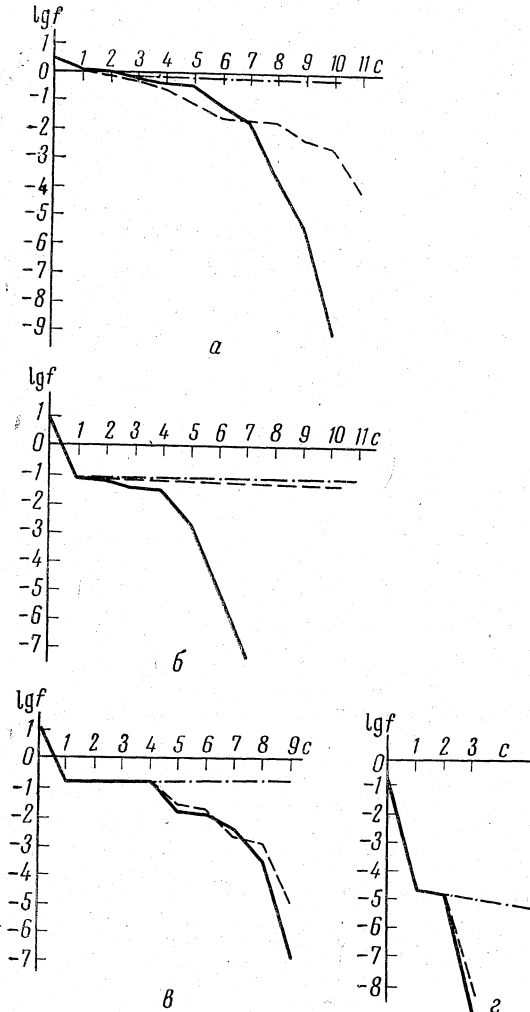


Рис. 2

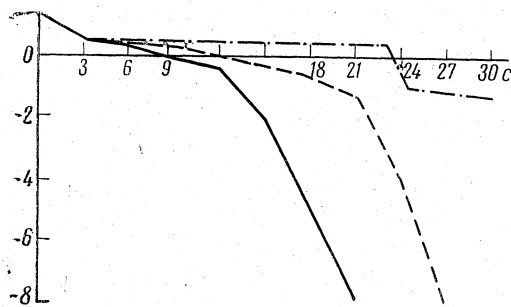


Рис. 3

Учитывая, что $s_{j-1}^T g_j = 0$ и $g_j^T g_{j+1} = 0$, можно записать

$$g_{j+1} = \lambda \cdot s_{j-1}, \quad (34)$$

где $\lambda \neq 0$ — постоянная.

Подставляя уравнения (24) и (34) в уравнение (33), получим

$$\begin{aligned} & \gamma^T k_s [-s_{j-1} (g_j^T g_j - g_{j-1}^T g_j) + \\ & + g_j g_{j-1}^T H_{j-1} g_{j-1}] = \lambda \beta_{j+1} s_{j-1} + \\ & + g_j \frac{\beta_j g_j^T g_j + \beta_{j+1} \lambda^2 s_{j-1}^T s_{j-1}}{g_j^T g_j}. \end{aligned} \quad (35)$$

В правой и левой частях уравнения (35) одни и те же векторы: g_j и s_{j-1} . Коэффициенты при этих векторах в правой части уравнения (35) неизвестны и точное сравнение правой и левой частей уравнения (35) невозможно. Однако можно переделить условия, при которых уравнение (35) справедливо хотя бы приближенно.

Рассмотрим соотношение коэффициентов при векторах g_j и s_{j-1} для 3-го этапа поиска — продвижения в узком овраге.

Согласно изложенному выше в этом случае коэффициент при g_j в левой части уравнения (35) мал, так как угол между векторами g_{j-1} и $H_{j-1} g_{j-1}$ близок к 90° . Коэффициент при s_{j-1} в левой части уравнения максимален, так как справедливо (9) и $g_{j-1}^T g_j < 0$. Рассмотрим коэффициенты в правой части уравнения (35). На третьем этапе поиска градиент g_j почти перпендикулярен дну узкого оврага и, следовательно, коэффициент при антиградиенте ($-g_j$) очень мал. Коэффициент при g_{j+1} (т. е. при s_{j-1}) намного больше, так как второе направление метода сопряженного градиента направлено вдоль дна оврага.

Следовательно, в обеих частях уравнения (34) коэффициенты

при g_j значительно меньше, чем при s_{j-1} . Можно предположить, что уравнение (35) приближенно выполняется при продвижении в овраге.

Полученные результаты позволяют провести качественное сравнение рассматриваемых методов.

1. На первом этапе поиска согласно утверждению 2 оба метода совпадают.

2. На втором этапе поиска может иметь преимущество метод сопряженного градиента.

3. На третьем этапе поиска несомненное преимущество имеет метод Дэвидона. Это метод хорошо приспособлен к продвижению вдоль дна оврага при условии, что образующая дна оврага не очень извилистая.

4. На четвертом этапе поиска оба метода равноценны, так как они квадратично сходящиеся.

Изложенные выше результаты имеют качественный характер, а доказательства даны для двумерных функций. В связи с этим представляет интерес провести численное сравнение методов для двумерных тестовых функций и функций большей размерности.

На рис. 2 приведены результаты численного сравнения методов (на рис. 2—5 по оси абсцисс отложено число направлений, а по оси ординат — логарифм функции, — метод Дэвидона, — — — метод сопряженного градиента, — — — метод наискорейшего спуска) на типичной для задач идентификации двумерной функции Бокса [2]

$$f(x_1, x_2) = \sum [(e^{-x_1^v} - e^{-x_2^v}) - (e^{-v} - e^{-10v})]^2,$$

где $v = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1$, при следующих начальных точках: $(0; 0)$, $(0; 20)$, $(5; 0)$, $(2,5; 10)$.

На рис. 3 приведены результаты сравнения методов на функции Розенброка $f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ для начальной точки $(-1,2; 1)$.

В связи с тем, что все сравнение проводилось выше для двумерных функций, представляет интерес рассмотрение результатов численного сравнения методов для функций большей размерности.

На рис. 4 приведены результаты сравнения методов для тестовой функции Флетчера и Пауэлла [4]

$$f(x_1, x_2, x_3) = 100\{[x_3 - 10\theta(x_1, x_2)]^2 + [(x_1^2 + x_2^2)^{0,5} - 1]^2\} + x_3^2,$$

где

$$2\pi\theta(x_1, x_2) = \begin{cases} \arctg x_2/x_1 & \text{при } x_1 > 0, \\ \pi + \arctg x_2/x_1 & \text{при } x_1 < 0, \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} < 2\pi\theta < 3\frac{\pi}{2}, \quad -2,5 < x_3 < 7,5,$$

при начальной точке $(-1; 0; 0)$.

На рис. 5 приведены результаты сравнения для тестовой функции Пауэлла [9]

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$

при начальной точке $(3; -1; 0; 1)$.

Результаты численного сравнения методов позволяют сделать следующие выводы.

1. Приведенные выше качественные результаты аналитического сравнения методов полностью подтверждаются при численном сравнении на ряде тестовых функций. Как следует из приведенных рисунков, методы совпадают на первых направлениях поиска (этап спуска в овраг). Далее следует этап, на котором метод сопряженного градиента обеспечивает более быстрое уменьшение функции (этап «разворота»). Затем следует этап продвижения в овраге, где проявляется несомненное преимущество метода Дэвидона.

2. Рис. 4 и 5 свидетельствуют о том, что выявленные выше свойства методов проявляются и при функциях большей размерности.

3. Полученные результаты позволяют определить начальные точки поиска, при которых метод сопряженного градиента доминирует над методом Дэвидона, — это точки, при которых этап продвижения в овраге мал, т. е. этап «разворота» приводит в окрестность минимума.

4. Метод сопряженного градиента превосходит метод Дэвидона лишь на одном этапе — этапе «разворота», и это превосходство объясняется свойством «обновления». Этот факт позволяет предложить новый метод

песка, сочетающий лучшие свойства обоих методов. За основу берется метод Дэвидона, в который вводится следующее изменение: после спуска в овраг (можно считать, что он происходит за два направления минимизации)

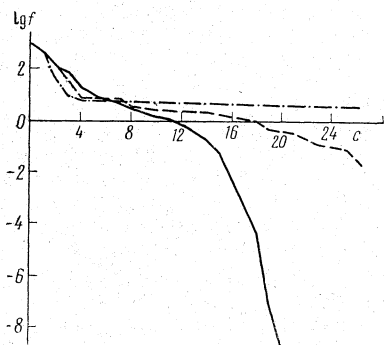


Рис. 4

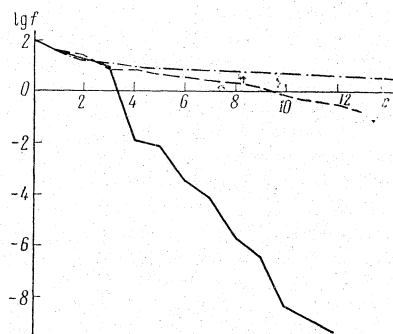


Рис. 5

ции) метод как бы начинает с начала, т. е. совершается шаг по направлению $s_3 = -H_0 g_3$ и матрицы H_1 и H_2 забываются. Предварительная проверка показала, что предлагаемый метод превосходит оба первоначальных.

Авторы выражают благодарность И. И. Перельману за ценные замечания.

Поступила в редакцию
18 мая 1970 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б. Т. Методы минимизации функций многих переменных (обзор). Экономика и математические методы, т. 3, вып. 6, 1967.
2. Уайльд Д. Дж. Методы поиска экстремума. «Наука», 1967.
3. Вох М. J. A comparison of several current optimization methods, and the use of transformations in constrained problem. The Computer J., v. 9, No. 1, 1966.
4. Fletcher R. Function minimization without evaluating derivatives — a review. The Computer J., v. 8, No. 1, 1965.
5. Fletcher R., Reeves C. M. Function minimization by conjugate gradients. The Computer J., v. 7, No. 2, 1964.
6. Fletcher R., Powell M. J. D. A rapidly convergent descent method for minimization. The Computer J., v. 6, No. 1, 1965.
7. Powell M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. The Computer J., v. 7, No. 1, 1964.
8. Myers G. E. Properties of the Conjugate-Gradient and Davidson Methods. J. Optimiz. theory and applic., v. 2, No. 4, 1968.
9. Powell M. J. D. An iterative method for finding stationary values of a function of several variables. The Computer J., v. 5, No. 1, 1962.

ON COMPARISON OF SCANNING METHODS OF SOLVING NONLINEAR PROBLEMS OF IDENTIFICATION

G. G. GORVITS, O. I. LARITCHEV

There is considered the problem of investigating the properties and comparing the two methods of nonlinear programming — the method of Davidson and the method of the conjugate gradients — for the class of essentially nonlinear valley functions.